

Disfida Matematica 2006

Soluzione del problema 23

23 **Il sorpasso.** Prima di tutto è importante osservare che la velocità media della seconda moto non è affatto di 100 km/h, infatti i tratti che fa a velocità costante hanno lunghezza uguale (un giro di pista), ma hanno durata leggermente diversa. Di fatto la velocità media risulta essere la media armonica tra 99 e 101, ma facciamo il conto a mano. Siccome la lunghezza della pista è inessenziale possiamo supporre che sia lunga 1 km; misureremo poi i tempi in ore e le lunghezze in km. Indichiamo con $T = 100$ la velocità della prima moto, e con $T + \delta$ e $T - \delta$ (con $\delta = 1$) le due velocità della seconda moto. La seconda moto impiega $1/(T + \delta)$ a percorrere i giri dispari e $1/(T - \delta)$ a percorrere i giri pari, quindi il tempo che impiega a percorrere due giri sarà di $\frac{1}{T+\delta} + \frac{1}{T-\delta} = \frac{2T}{T^2-\delta^2}$. La prima moto impiegherà $\frac{2}{T}$, cioè un tempo leggermente inferiore. È dunque chiaro che alla fine di tutti i giri pari sarà in testa la prima moto, con un vantaggio di tempo che aumenta ogni 2 giri della quantità

$$\frac{2T}{T^2 - \delta^2} - \frac{2}{T} = 2 \frac{T^2 - (T^2 - \delta^2)}{T(T^2 - \delta^2)} = 2 \frac{\delta^2}{T(T^2 - \delta^2)}.$$

Nei giri dispari, la differenza nei tempi di percorrenza, a favore della seconda moto, è $1/T - 1/(T + \delta) = \frac{\delta}{T(T+\delta)}$ e la seconda moto ce la fa a risuperare la prima fintanto che il suo svantaggio alla fine del giro precedente (pari) è inferiore a tale quantità, ovvero, indicando con $k+1$ (dispari) il numero di giri effettuati, fintanto che

$$k \frac{\delta^2}{T(T^2 - \delta^2)} < \frac{\delta}{T(T + \delta)}$$

ovvero, facendo denominatore comune e semplificando:

$$k\delta^2 < \delta(T - \delta) \iff k < \frac{T - \delta}{\delta} = 99.$$

Questo significa che l'ultimo giro in cui la seconda moto riesce a superare la prima è il novantanovesimo. In tutti i giri precedenti si ha sempre

un sorpasso a giro (con l'eccezione del primo giro), infatti alla fine dei giri pari risulta in testa la prima moto e alla fine dei giri dispari risulta in testa la seconda moto, peraltro non è possibile più di un sorpasso a giro, essendo le velocità costanti. Dal centesimo giro in poi rimarrà sempre in testa la prima moto, con un vantaggio che continua ad incrementare. L'ultimo sorpasso lo effettua al centesimo giro la prima moto sulla seconda. Alla fine quindi vince la prima moto e ci saranno stati in tutto 99 sorpassi. La risposta è $\boxed{1099}$.