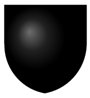
Soluzioni per la Coppa Galileo 2013

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Mihaela Badescu, Gabriele Balletti, Daniele Boccalini, Alessio Caminata, Luca De Stefano, Fulvio Gasparini, Alessandro Logar, Emanuele Maccario, Matteo Musso, Ruggero Pagnan, Maurizio Paolini, Ludovico Pernazza, Edi Rosset, Daniele Scarlata, Carlo Vota.



Winter is coming: l'inverno sta arrivando.
Le profezie non sono certezze; nessuno,
neppure l'autore, sa quando finirà la saga.

Soluzione del problema 1. Ogni coppia di affermazioni uguali deve essere falsa. L'unica vera è la seconda.
La risposta è `0010`.

Soluzione del problema 2. Dato che il foglio iniziale non è un quadrato, è un rettangolo (di area $144\,\text{cm}^2$—tutte le coppie di piegature a metà danno la stessa area) con lati $6\,\text{cm}$ e $24\,\text{cm}$. Il massimo possibile è $2(24+\frac{6}{4}) = 51$.
La risposta è `0051`.

Soluzione del problema 3. Tutti i codici a 5 cifre possibili sono $10^5 = 100000$. I tipi di codici utilizzati sono: $xyyyy$, $yyyyx$, $xxyyy$ o $yyyxx$. Ciascun gruppo sono $10^2 - 10^1 = 90$, in totale sono 360. I codici di cinque cifre sono $10^5 = 100000$. Il rapporto è $\dfrac{360}{100000} = \dfrac{9}{2500}$.
La risposta è `2491`.

Soluzione del problema 4. Dalla formula dell'area del trapezio si ottiene:

$$\frac{\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\times h}{2} = 165$$

dove h è l'altezza che vale 15. Da questa equazione si ricava $\overline{CD} = 6$. Sia x l'altezza del triangolo CDE relativa al lato CD. Dalla similitudine tra i triangoli CDE e ABE si ricava:

$$x : \overline{CD} = (x+15) : \overline{AB}$$

da cui si ottiene $x = 9$. L'area del triangolo ABE è quindi data da $16 \times (9+15)/2 = 192$. La risposta è quindi 192.
La risposta è `0192`.

Soluzione del problema 5. PDOR vale 4. Si considerino le partizioni naturali del numero 4 formate da 4 addendi. Esse sono:

$$4 = 2+2+0+0$$

$$4 = 2+1+1+0$$

$$4 = 1+1+1+1$$

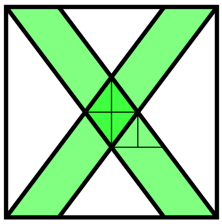
Ora si contino quelle di ciascuna categoria. Rispettivamente ne hanno:

$$\frac{14^2 \cdot 1^2 \cdot 4!}{2! \cdot 2!} = 1176$$

$$\frac{14^1 \cdot 6^2 \cdot 1^1 \cdot 4!}{2!} = 6048$$
$$\frac{6^4 \cdot 4!}{4!} = 1296$$

Il totale ammonta dunque a 8520, da cui escludere il nome iniziale, per cui la soluzione risulta essere 8519.
La risposta è `8519`.

Soluzione del problema 6. L'area del quadrato è $60\,\text{cm} \times 60\,\text{cm} = 3600\,\text{cm}^2$. L'area di un parallelogrammo è $60\,\text{cm} \times 15\,\text{cm} = 900\,\text{cm}^2$. L'area su cui i due parallelogrammi si sovrappongono è $\frac{1}{2}20\,\text{cm} \times 15\,\text{cm} = 150\,\text{cm}^2$. L'area bianca è $3600\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 900\,\text{cm}^2 + 150\,\text{cm}^2 = 1950\,\text{cm}^2$.



La risposta è `1950`.

Soluzione del problema 7. Il numero A_i sulla riga i è $A_i = 1 + 2 + \cdots + 20 + i$, quindi
$$A_1 + \cdots + A_{20} = 21 \cdot (1 + \cdots + 20) = 4410.$$
La risposta è `4410`.

Soluzione del problema 8. Siano a e b le basi maggiore e minore, h_1 l'altezza del trapezio con la trave come base minore, h_2 l'altezza di quello con la trave come base maggiore. Sia x la lunghezza della trave. Deve essere
$$2h_1(a + x) = (a + b)(h_1 + h_2) \qquad \text{e} \qquad 2h_2(b + x) = (a + b)(h_1 + h_2),$$
da cui
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a + b}{2x + a - b} \qquad \text{e} \qquad \frac{h_1}{h_2} = \frac{2x + b - a}{a + b}.$$
Perciò $x^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ da cui si trova $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.
La risposta è `5450`.

Soluzione del problema 9. Conviene aggiungere, per le prime osservazioni, il termine $a_0 = (-1)^0 + (-1)^{\text{qu}(0,2)} + (-1)^{\text{qu}(0,3)} + (-1)^{\text{qu}(0,4)}$, che è diverso da zero e non interverrà nel computo finale. Consideriamo i singoli addendi di a_i, per $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
(-1)^i &= 1,-1,\ \ 1,-1,\ \ 1,-1,\ \ 1,-1,\ldots && \text{si ripete ogni 2 passi}\\
(-1)^{\text{qu}(i,2)} &= 1,\ \ 1,-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,-1,-1,\ldots && \text{si ripete ogni 4 passi}\\
(-1)^{\text{qu}(i,3)} &= 1,\ \ 1,\ \ 1,-1,-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,\ldots && \text{si ripete dopo 6 passi}\\
(-1)^{\text{qu}(i,4)} &= 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,-1,-1,-1,-1,\ldots && \text{si ripete ogni 8 passi.}
\end{aligned}$$

Poiché $\text{mcm}(2, 4, 6, 8) = 24$, si ha che a_i si ripete dopo 24 passi, cioè $a_i = a_{i+24}$. Basta allora calcolare quante volte a_i vale 0 per i primi 24 valori di i e questi sono in totale 8 e cioè per $i = 4, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 19$. Poiché $\text{qu}(2013, 24) = 83$ con il resto

di 21, in totale abbiamo che nella successione degli a_i lo zero compare $84 \times 8 = 672$ volte.
La risposta è 0672.

Soluzione del problema 10. La funzione soddisfa la relazione $f(ax) = f(a) \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ e ogni $a \in \mathbb{Q}$. Infatti, per $x = 0$, $f(a0) = f(0) = f(0) + f(0)$; quindi $f(a0) = 0$. Inoltre, assumendo $f(an) = f(a) \cdot n$ per $n \in \mathbb{N}$,

$$f(a(n+1)) = f(an) + f(a) = f(a) \cdot n + f(a).$$

Dato che $0 = f(0) = f(an + a(-n)) = f(an) + f(-an)$

$$f(-an) = -f(an) = f(a) \cdot (-n).$$

Per $a = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, si trova perciò $f(p) = f\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$, così

$$p \cdot f(1) = q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$$

e $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot f(1)$. Perciò, dalla relazione $f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{8}{7}$, si trova che $f(1) = \frac{64}{49}$.
Risulta $f\left(\frac{49}{2}\right) = \frac{49}{2} \cdot f(1) = \frac{49}{2} \cdot \frac{64}{49} = 32$.
La risposta è 0032.

Soluzione del problema 11. Sia n_k il numero nella scatola k, $k = 1, \ldots, 5$. Se tutte le scatole di legno dicono il vero, n_1 è minore di 200 e maggiore di 220. Questo è assurdo. Se la scatola 2 è vera e la scatola 4 è falsa, allora la scatola 5 è vera quindi la 2 è falsa: assurdo. Dunque, la scatola 2 è falsa; tutte le scatole di metallo sono vere, quindi, per la scatola 5, tutte le scatole di legno sono false. Perciò $200 < n_1 < 220$ ed è primo. L'unico primo in questo intervallo è 211. I fattori di n_3 possono essere $2, 3^2, 5, 7, 11, 13$ da cui si deve escludere il fattore 11 perchè la scatola 4 dice il falso, così $n_3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 8190$. A questo punto $n_2 = 8190/210 = 39$, quindi $n_5 = 8229$.
La risposta è 8229.

Soluzione del problema 12. I triangoli richiesti hanno i lati di lunghezza $(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2})$. L'area del giorno 17 è 1224 e l'area del giorno 19 è 1710. La risposta corretta, quindi, è 19.
La risposta è 0019.

Soluzione del problema 13. Si deve trovare un numero n pari ed un numero i tali che

$$\frac{n(n+1)}{2} - i - (i+1) = \frac{n(n+1)}{2} - (2i+1) = 65000.$$

La soluzione positiva dell'equazione $x^2 + x - 2 \cdot 65000 = 0$ è compresa tra 360 e 361 dato che $\sqrt{1 + 4 \cdot 130000} \approx 721.11$. Perciò $n = 362$ (e $i = 351$).
La risposta è 0362.

Soluzione del problema 14. Se il segnaposto è in 0 e si lancia il dato, il segnaposto finisce in 0 con probabilità 1/6 (solo se il dado ha il valore 6), finisce in 2 con probabilità 1/6 (solo se il dado ha il valore 2), finisce in 3 con probabilità 1/3 (se il dado ha il valore 3 o 4), finisce in 5 (cioè si vince) con probabilità 1/3 (se il dado ha il valore 1 o 5). Un conto analogo prova che ogni volta che si lancia il dado, la probabilità di finire la partita è sempre 1/3 e la probabilità di finire nella

casella 2 è sempre 1/6. La probabilità di continuare la partita fino al sesto lancio con il segnaposto in 2 coincide quindi con la probabilità che si verifichino i seguenti due eventi indipendenti: la partita continua fino al quinto lancio (vale $(2/3)^5$) e al sesto lancio il segnaposto finisca in 2 (probabilità 1/6). La probabilità complessiva è quindi $(2/3)^5 \times 1/6 = 16/729$. La risposta è quindi 713.
La risposta è `0713`.

Soluzione del problema 15. Siano $r_0 = 2013$, $r_1 = (r_0 - 1) \times 1$, $r_2 = (r_1 - 2) \times 2, \ldots$ i risultati via via ottenuti. Visto che interessano soltanto le ultime tre cifre, basta considerare i resti dei risultati rispetto alla divisione con 1000, come faremo d'ora innanzi. Perciò le ultime tre cifre di r_{2000} sono 000 e basta calcolare la lista delle ultime tre cifre, cioè i resti dei risultati nella divisione con 1000:

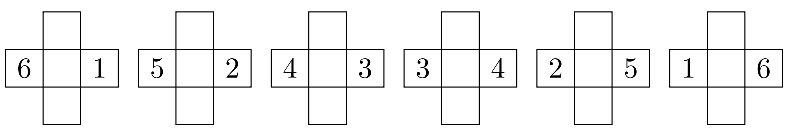
ultime tre cifre di $r_{2001} = 999$	ultime tre cifre di $r_{2007} = 609$
ultime tre cifre di $r_{2002} = 994$	ultime tre cifre di $r_{2008} = 808$
ultime tre cifre di $r_{2003} = 973$	ultime tre cifre di $r_{2009} = 191$
ultime tre cifre di $r_{2004} = 876$	ultime tre cifre di $r_{2010} = 810$
ultime tre cifre di $r_{2005} = 355$	ultime tre cifre di $r_{2011} = 789$
ultime tre cifre di $r_{2006} = 094$	ultime tre cifre di $r_{2012} = 324$
	ultime tre cifre di $r_{2013} = 43$

La risposta è `0043`.

Soluzione del problema 16. Sia (p, q) la generica coppia di numeri primi. Dalla prima condizione si ha $p \neq 2$. Dalla seconda condizione si ha $q \neq 2$. Poiché è la somma di due numeri dispari è pari si ha che $p + q$ è pari, allora la differenza di due numeri pari deve essere pari. Quindi $p + q - 124 = 2$, visto che 2 è l'unico numero primo pari, di conseguenza, $p + q = 126$. Si procede per tentativi: $126 - 3 = 123$ non è primo, $126 - 5 = 121$ non è primo, $126 - 7 = 119$ non è primo, $126 - 11 = 115$ non è primo. $126 - 13 = 113$ è primo e il prodotto è 1469.
Tutte le coppie successive fino a 61 hanno il prodotto maggiore di 1469.
La risposta è `1469`.

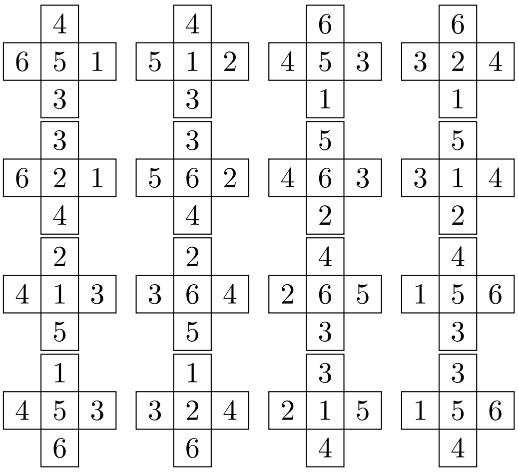
Soluzione del problema 17. Le due navicelle ruotano per $20°/\,\text{sec}\dfrac{45\,\text{m}}{.5\,\text{m}/\,\text{sec}} = 1800°$, cioè fanno 5 giri. Completano un giro ogni 9 m. Sviluppando le superfici laterali dei cilindri su cui si sviluppano i due percorsi, si trova che le navicelle percorrono la diagonale di un rettangolo che ha base di 5ℓ dove ℓ è la lunghezza della circonferenza e altezza 45 m, cioè $\sqrt{(5\ell)^2 + 45^2} = 5\sqrt{\ell^2 + 9^2}$.
I due percorsi sono $5\sqrt{12^2 + 9^2} = 5 \times 15 = 75$ e $5\sqrt{40^2 + 9^2} = 5 \times 41 = 205$; la differenza è 130.
La risposta è `0130`.

Soluzione del problema 18. Una fila consiste al massimo di 6 dadi come segue:



Il rettangolo di dadi non può avere più di 6 dadi sul lato maggiore. Dato che la faccia 6 non può essere mai a contatto, tutti i dadi interni al rettangolo non aderiscono mai su quella. Perciò una faccia 5 di un dado interno deve aderire ad una faccia 1, necessariamente di un dado esterno, dunque il lato minore non può avere più di

4 dadi. Inoltre, impilando file lunghe almeno 5 dadi, nella terza colonna, i dadi aderiscono con le facce 3 e 4 che non sono dunque disponibili per le colonne. Perciò, cercando di costruire un rettangolo con un lato con almeno 5 dadi, si ottiene al massimo un rettangolo di 6 dadi per 2. Si vede ora che si realizza un rettangolo di 4 dadi per 4:



La risposta è `0016`.

Soluzione del problema 19. Escludendo i primi due balzi, la sequenza degli altri si può così rappresentare: metri che il drago si sposta verso Est: $1 + 9 + 17 + \cdots + (1 + 8i) + \cdots$ dove i è un intero tale che $1 + 8i \leq 400$, quindi i al massimo può valere 49. Analogamente il drago si sposta verso Nord-Est di $2 + 10 + 18 + \cdots + 394$ metri, cioè della somma di $2 + 8i$ con $i = 0, 1, \ldots, 49$, quindi otteniamo la seguente tabella

E	$1 + 9 + \cdots + (1 + 8 \cdot 49) = (49 + 1)(2 \cdot 1 + 8 \cdot 49)/2 = 9850$
N-E	$2 + 10 + \cdots + (2 + 8 \cdot 49) = (49 + 1)(2 \cdot 2 + 8 \cdot 49)/2 = 9900$
N	$3 + 11 + \cdots + (3 + 8 \cdot 49) = (49 + 1)(2 \cdot 3 + 8 \cdot 49)/2 = 9950$
N-O	$4 + 12 + \cdots + (4 + 8 \cdot 49) = (49 + 1)(2 \cdot 4 + 8 \cdot 49)/2 = 10000$
O	$5 + 13 + \cdots + (5 + 8 \cdot 49) = (49 + 1)(2 \cdot 5 + 8 \cdot 49)/2 = 10050$
S-O	$6 + 14 + \cdots + (6 + 8 \cdot 49) = (49 + 1)(2 \cdot 6 + 8 \cdot 49)/2 = 10100$
S	$7 + 15 + \cdots + (7 + 8 \cdot 49) = (49 + 1)(2 \cdot 7 + 8 \cdot 49)/2 = 10150$
S-E	$8 + 16 + \cdots + (8 + 8 \cdot 49) = (49 + 1)(2 \cdot 8 + 8 \cdot 49)/2 = 10200$

Spostarsi ad Est di 9850 metri equivale ovviamente a spostarsi ad Ovest di -9850 metri, analogamente N-E si può associare a S-O, N-O a S-E e N a S. Quindi il drago si sposta di 200 metri ad Ovest, di 200 metri a Sud-Ovest, di 200 metri a Sud e di 200 metri a Sud-Est. Tenendo conto dei due balzi iniziali, si sposta dal punto iniziale di 200 metri a Sud-Ovest e 200 metri a Sud-Est, cioè si sposta dal punto iniziale di $200\sqrt{2}$ metri (a Sud). La risposta è quindi 282.
La risposta è `0282`.

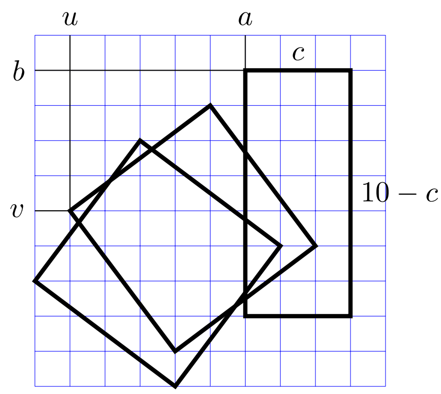
Soluzione del problema 20. Si osserva innanzi tutto che esiste una configurazione accettabile in cui ci sono 174 uffici:

S=Sala d'attesa, A=Appartamento, U=Ufficio

`AAAAAAA`	Piano 70	0 uffici
`USUSUSU`	Piano 69	4 uffici
`UASASAU`	Piano 68	fino a qui ci sono $5 \times 34 = 170$ uffici
$\vdots$		
`USUSASU`	Piano 3	3 uffici
`UASASAU`	Piano 2	2 uffici, fino a qui ci sono 5 uffici
`USUSASU`	Piano 1	3 uffici

Non esiste una configurazione con meno uffici. Infatti
(1) a ogni piano non possono esserci più di 3 sale d'attesa, altrimenti ci sarebbero sicuramente più sale d'attesa che uffici a quel piano.
(2) a ogni piano, eccetto l'ultimo, non possono esserci più di 3 appartamenti, altrimenti al piano successivo ci sarebbero più di 3 sale d'attesa
(3) sopra un piano con 2 uffici ce ne deve essere uno con almeno 3 uffici. Se a un piano ci sono 2 uffici, ci sono al massimo 2 sale d'attesa; questo è anche il numero minimo (se fossero meno ci sarebbero più di 3 appartamenti). Allora in un piano con 2 uffici ci sono esattamente 2 sale d'attesa e 3 appartamenti. Allora al piano successivo ci sono almeno 3 sale d'attesa, dunque almeno 3 uffici.
(4) Ad ogni piano, eccetto all'ultimo, ci devono essere almeno 2 uffici, altrimenti a tale piano ci sarebbe al massimo una sala d'attesa e dunque almeno 5 appartamenti, contraddicendo l'osservazione (2).
Da (1)-(4) segue che nei primi 68 piani il minimo numero di uffici si ottiene alternando un piano da 2 uffici a uno da 3 uffici.
Ora resta da dimostrare che negli ultimi 2 piani non si possono mettere meno di 4 uffici: infatti, al piano 69, per l'osservazione (4), devono esserci almeno 2 uffici. Per avere meno di 4 uffici negli ultimi 2 piani, vi sono solo due possibilità: 2-1, 2-0. Ma per l'osservazione (3), nessuna delle due è accettabile.
La risposta è `0174`.

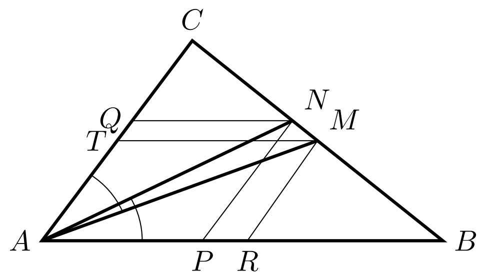
Soluzione del problema 21. Sia $\ell = 5\,\mathrm{cm}$. Un rettangolo con i vertici nella griglia può essere di due tipi: con i lati paralleli ai lati della griglia oppure un quadrato con i lati obliqui, inclinati in modo che siano le ipotenuse di triangoli rettangoli con cateti lunghi 3ℓ e 4ℓ, inclinati come mostrato in figura



Dette (u, v) le coordinate di un vertice di uno di questi quadrati (come in figura), si vede facilmente che u può variare tra 0 e 3, mentre v può variare tra 3 e 6. Quindi ci sono 16 quadrati di questo tipo. Analogamente ci sono altri 16 quadrati del secondo tipo.
Siano poi a, b le coordinate di un vertice di un rettangolo con i lati paralleli ai lati della griglia e sia c la lunghezza del lato orizzontale (quindi il lato verticale

vale $10 - c$). Il lato c può assumere valori tra 1 e 9. Fissato un valore di c le coordinate a, b devono essere tali che $0 \leq a \leq 10 - c$, e $0 \leq b \leq c$. Pertanto se $c = 1$ abbiamo 10×2 rettangoli, se $c = 2$ ne abbiamo 9×3, e così via. Il numero totale dei rettangoli con i vertici sui punti della griglia e con perimetro 20 è quindi: $16 + 16 + 10 \times 2 + 9 \times 3 + 8 \times 4 + \cdots + 3 \times 9 + 2 \times 10$. Quindi la risposta è 296.
La risposta è 0296.

Soluzione del problema 22. Sia A la posizione di Tyrion, B il faro sulla riva est, C quello sulla riva ovest, M la posizione della boa, N la posizione della nave vedetta. Si costruiscono le parallele $NP \parallel AC$ con P su AB, $NQ \parallel AB$ con Q su AC, $MR \parallel AC$ con R su AB e $MT \parallel AB$ con T su AC. Dato che M è punto medio, anche R e T sono punti medi.



Si ottengono le relazioni

$$\frac{BN}{BC} = \frac{PN}{AC} \qquad \frac{BC}{CN} = \frac{AB}{NQ} \qquad \frac{CT}{AC} = \frac{TM}{AB}$$

Perciò

$$\frac{BN}{CN} = \frac{PN \cdot AB}{AC \cdot AP}$$

Inoltre, gli angoli $\widehat{ATM}$ e $\widehat{APN}$ sono uguali in quanto angoli opposti di un parallelogrammo. Perciò i triangoli APN e ATM sono simili; quindi $\frac{AP}{AT} = \frac{PN}{TM}$. Ne risulta

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AT}{TM} = \frac{CT}{TM} = \frac{AC}{AB}.$$

Perciò

$$\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2} = \left(\frac{8\,\text{km}}{5\,\text{km}}\right)^2 = 2.56.$$

Dunque $CN = \dfrac{BC}{3.56} = \dfrac{8.9\,\text{km}}{3.56} = 2500\,\text{m}$.
La risposta è 2500.

Soluzione del problema 23. Sia $l = 30$ la diagonale della sezione quadrata. Il solido con volume minimo è formato con anelli ottenuti facendo ruotare i quadrati attorno ad una retta parallela alla diagonale del quadrato, posta a distanza $\frac{l}{2}$ dal vertice più vicino.
Questi due anelli, incatenandosi, danno luogo a 7 punti di contatto, tali punti sono i vertici di due quadrati uguali di lato l che hanno una coppia di diagonali sulla stessa retta, un vertice in comune e giacenti su piani perpendicolari.
Il solido di cui cerchiamo il volume è formato da due piramidi uguali con la base quadrilatera in comune. Ognuna delle piramidi ha come base il quadrilatero che ha tre vertici sui tre punti di un quadrato (che non siano il punto in comune ad entrambi i quadrati) e il quarto vertice nel vertice più lontano del secondo quadrato

e altezza pari alla metà della diagonale di un quadrato. Il volume cercato è quindi a $2\frac{1}{3} \cdot 2l^2 \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^3}{3} = 9000$.
La risposta è `9000`.

Soluzione del problema 24. La palla in un minuto compie il giro completo del solco piccolo oppure mezzo giro del solco grande. Sia S il punto di collegamento e T il punto di mezzo del solco grande. Misuriamo il tempo a partire dall'inizio della gara. Sia $p_S(t)$ la probabilità che la palla si trovi in S all'istante t (con $t = 1, 2, \ldots$; t misurato in minuti). Pertanto $p_S(1) = 1$ perché allo scoccare del primo minuto la palla è in S. Sia $p_T(t)$ la probabilità che la palla non sia in S nell'istante t (quindi è in T). Ovviamente $p_S(t) + p_T(t) = 1$. Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} p_T(t) & = & \frac{1}{2} p_S(t-1) \\ p_S(t) & = & p_T(t-1) + \frac{1}{2} p_S(t-1) \end{cases}$$

La prima equazione deriva dal fatto che, affinché la palla sia in T all'istante t, un minuto prima deve essere transitata per S e quando transita per S ha probabilità $1/2$ di andare sul solco grande. La seconda equazione deriva dal fatto che, se la palla all'istante t si trova in S, allora un minuto prima poteva essere in T (e in questo caso dovrà necessariamente passare per S dopo un minuto) oppure poteva essere in S e aver imboccato il solco piccolo (con probabilità $1/2$). Dal sistema di sopra si ricava che

$$p_T(t) = \frac{1}{4} \left(p_T(t-2) + 1 \right)$$

Quindi, poiché $p_T(1) = 0$, si ottiene:

$$p_T(3) = \frac{1}{4}, \quad p_T(5) = \frac{5}{16}, \quad p_T(7) = \frac{21}{64},$$

$$p_T(9) = \frac{85}{256}, \quad p_T(11) = \frac{341}{1024}, \quad p_T(13) = \frac{1365}{4096}.$$

quindi $p_S(13) = 1 - p_T(13)$ e infine $p_T(14) = \dfrac{1}{2} p_S(13) = \dfrac{2731}{8192}$.
La risposta è `5461`.