

# Progetto Olimpiadi della Matematica

## Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che
  - a) la *parte intera* di un numero reale  $x$  è il più grande intero minore o uguale ad  $x$ ; si scrive  $\lfloor x \rfloor$ —ad esempio  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 10 \rfloor = 10$ ,  $\lfloor \sqrt{17} \rfloor = 4$ ;
  - b) il *successivo* del numero intero  $n$  è il numero  $n + 1$  e i due numeri sono detti *consecutivi*;
  - c) il *fattoriale* del numero intero  $n$  è il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a  $n$ ; si scrive  $n!$ —ad esempio  $1! = 1$ ,  $5! = 120$ ,  $6! = 720$ ;
  - d) un *quadrato perfetto* è un numero intero che è quadrato di un numero intero—ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
  - e) una lista è *palindroma* se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista—ad esempio *radar* è palindroma; *drone* non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera—cioè, il resto della divisione con  $10^4$ ; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\sqrt{3} = 1,7321$$

$$\sqrt{5} = 2,2360$$

$$\pi = 3,1415.$$

## Aspettando Godol

### Tragicommedia in due atti

da un'idea di Samuel Beckett<sup>(1)</sup>

#### Atto secondo

*È pomeriggio, circa le due. Stessa strada di campagna del primo atto. Ci sono due stivali sul bordo. Entra Teodomiro agitato. Si ferma e inizia a cantare..*

**Teodomiro** Dove sei, Gogo?

**Astragone** (Uscendo da dietro l'albero) Sono qui.

**Teodomiro** Che cosa ti successo?

**Astragone** Niente.

**Teodomiro** Ma ti hanno picchiato! Chi è stato?

**Astragone** Non lo so. Era buio. Non voglio pensarci.

**Teodomiro** Invece bisogna pensarci. Ne va del nostro destino. E la sola possibilità per prevedere qualcosa di sensato per il futuro è conoscere bene la nostra matematica.

**Astragone** La mia? O la tua?

**Teodomiro** Tutte. Se fatte con la dovuta cura, tutte servono.

<sup>(1)</sup> L'autore di un problema è indicato prima del testo.



**1.**

Carlo Càssola

**Teodomiro** Mentre venivo, contavo i numeri palindromi di sette cifre.

**Astragone** Quanti sono?

**2.**

Lorenzo Mazza

**Astragone** Ho disegnato un triangolo con un lato di 10 cm e l'altezza ad esso relativa di 6 cm. Ho anche trovato il suo baricentro.

**Teodomiro** Indica i vertici del triangolo con X, Y e Z, il baricentro con B. Traccia la parallela per B al lato più lungo YZ. Diciamo che V e W sono le intersezioni con i lati. Qual è il rapporto fra l'area del triangolo XVW e quella del trapezio YZVW?

[Dare come risposta il rapporto moltiplicato per  $10^4$ .]

**3.**

Sandro Campigotto

**Teodomiro** Qual è il più grande valore di  $n$  per cui  $\frac{2023!}{(10!)^n}$  è un numero intero?

**4.**

Sandro Campigotto

**Astragone** Non so che cosa fare.

**Teodomiro** Aspettiamo.

**Astragone** Chi?

**Teodomiro** Godol, chi altri?

**Astragone** Per passare il tempo diciamo numeri?

**Teodomiro** Va bene.

**Astragone** Io inizio con 1 e aggiungo sempre 2.

**Teodomiro** Io inizio da 10000 e sottraggo sempre 7.

**Astragone** Uno, tre, cinque,

**Teodomiro** (*Scandendo numero a numero con Astragone*) Diecimila,

novemilanovecentonovantatre,  
novemilanovecentoottantasei, (*Alza la mano, urlando*) Fermo! A un certo momento diremo lo stesso numero!

**Astragone** Quale?

**5.**

Sandro Campigotto

**Astragone** Guarda, Dodo: ho trovato un sacchetto con sedici palline numerate da 15 a 30. Se ne tiro fuori due, qual è la probabilità che il loro prodotto sia multiplo di 6?

[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per  $10^4$ .]

**6.**

Carlo Càssola

**Teodomiro** Disegna un ottagono ABCDEFGH che abbia i lati opposti a due a due paralleli e uguali.

**Astragone** (*Si mette al lavoro con cura*) Ho misurato i lati che ho disegnato  
 $AB = EF = 30 \text{ cm}$ ,  $BC = FG = 10\sqrt{10} \text{ cm}$ ,  
 $CD = GH = 10 \text{ cm}$ ,  $DE = HA = 10\sqrt{2} \text{ cm}$ .

**Teodomiro** Non ci credo! ABEF è un rettangolo. E anche: prolungando i lati AB, CD, EF e GH ottieni un quadrato! Quanto vale l'area dell'ottagono in  $\text{cm}^2$ ?

**7.**

Sandro Campigotto

**Astragone** Stavo pensando.

**Teodomiro** A cosa?

**Astragone** Quante triple ordinate  $(a, b, c)$  di numeri interi sono tali che  $abc = 2023$ ?

**8.**

Lorenzo Mazza

**Astragone** Ricordo dieci scatole contenenti biglie di colore rosso, nero, giallo e verde. Sapevo che il numero di biglie rosse in ciascuna scatola coincideva con il numero di biglie nere nelle rimanenti nove scatole; il numero di biglie nere in ciascuna scatola coincideva con il numero di biglie gialle nelle rimanenti nove scatole; il numero di biglie gialle in ciascuna scatola coincideva con il numero di biglie verdi nelle rimanenti scatole.

**Teodomiro** Ma erano un numero esagerato di biglie?

**Astragone** Sì, ricordo che erano proprio tante! E il numero totale di tutte le biglie nelle scatole era un multiplo di 6. Qual era il numero minimo di biglie in una scatola?

**9.**

Carlo Càssola

**Teodomiro** All'interno della base AB di un triangolo equilatero ABC disegna il punto D tale che  $AD = 3DB$ . Sulla semiretta di origine C e passante per D fissa il punto E in modo che sia  $CE = AB$ . Quanto è l'ampiezza in gradi di  $\hat{AEB}$ ?

**10.**

Sandro Campigotto

**Astragone** Ho scritto cinque numeri naturali.  
**Teodomiro** Ce ne sono due uguali?  
**Astragone** No. La media dei due più piccoli è 100. La media dei due più grandi è 200. La media dei cinque numeri è un numero intero. Quali sono il più piccolo e il più grande valore possibile del numero più grande tra i cinque? [Dare come risposta la somma dei due valori.]

**11.**

Sandro Campigotto

**Astragone** Ho disegnato tre cerchi concentrici di aree  $400\pi \text{ cm}^2$ ,  $600\pi \text{ cm}^2$  e  $800\pi \text{ cm}^2$ .  
**Teodomiro** Che cos'è P-greco?  
**Astragone** È  $3,1415926535897$  (Teodomiro agita le mani e interrompe Astragone).  
**Teodomiro** Va bene; ho capito!  
**Astragone** (Riprendendo quello che diceva) Dicevo: e  $800\pi \text{ cm}^2$ . Da un punto del cerchio di raggio maggiore ho tracciato tutte le tangenti agli altri due cerchi. Quanto vale il più piccolo tra tutti gli angoli formati da coppie di tangenti?

**12.**

Sandro Campigotto

**Teodomiro** Guarda, Gogo! Ho trovato un sacchetto con 23 monete. Sono tutte della stessa grandezza e peso; tutte con testa e croce, esclusa una che ha testa su entrambi i lati.  
**Astragone** Ho paura, Dodo. Sicuramente il baro che ha perso il sacchetto starà cercandolo.  
**Teodomiro** Il sacchetto era per terra, nessuno lo reclama: è mio. (Teodomiro prende una moneta a caso. La lancia due volte.) Che strano! In entrambi i lanci è venuto testa e non ho guardato che cosa c'era sull'altro lato della moneta.  
**Astragone** Qual è la probabilità che la moneta presa sia la moneta con due teste?  
[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per  $10^4$ .]

**13.**

Simone Muselli

**Teodomiro** Immagino un'isola abitata da cifre, ci sono zeri, uni, due, tre, fino a tanti nove, con gambe, braccia, bocca. Sono tutti sinceri, eccetto gli zeri, che mentono sempre. Quattro cifre, sedute una accanto all'altra stanno formando un numero intero maggiore di 999. Iniziano a parlare, dicendo tutte la stessa frase:

«Se me ne andassi, le cifre rimanenti formerebbero un numero di tre cifre, divisibile per 7 e per 11.»

Qual è il numero che le quattro cifre stanno formando?

**14.**

Giuseppe Rosolini

**Teodomiro** Il numero di quattro cifre  $n$  è il prodotto di tre numeri primi diversi. Sottraendo  $n$  alla somma dei divisori di  $n$  si ottiene 2074.  
**Astragone** Non basta per sapere quanto vale  $n$ .  
**Teodomiro** Non mi interessa  $n$ . Mi interessa la somma dei tre numeri primi: qual è il suo valore minimo?

**15.**

Lorenzo Mazza

**Astragone** Che cosa succede?  
**Teodomiro** Sto pensando.  
**Astragone** No, Dodo, guarda là fuori. Sta arrivando qualcuno.  
**Teodomiro** Cercavo di ricordare i divisori di  $11^6 - 1$ .  
**Astragone** (Entrano Lozzo e Pucky, la corda è corta, Lozzo si muove a tentoni) Ci sono quei due di ieri.  
**Teodomiro** Chissà quanti sono i divisori che cercavo?

**16.**

Lorenzo Mazza

**Lozzo** Immagino anche un poligono convesso di 2023 lati in cui sono tracciate tutte le diagonali. E immagino una retta che interseca il poligono e le diagonali, (*si infervora*) senza passare per alcun vertice del poligono stesso. (Calmandosi) Qual è il massimo numero possibile di intersezioni tra le diagonali e la retta che si possono immaginare?

**17.**

Simone Muselli

**Teodomiro** Ti racconto una storia (*Rivolto a Lozzo che guarda avanti*) Nella lontana isola di Barus, vivono 2023 abitanti di due tipi: gli Onesti, che dicono sempre la verità, e i Bari, che dicono sempre il falso, e cercano di non farsi scoprire. A causa di una grande festa, tutti gli abitanti dell'isola si sono riuniti nella piazza centrale. Ad un certo punto, uno dice ad un altro: "Sei un Baro!". L'altro gli risponde: "Ah sì? Se io sono un Baro, allora tu sei un Baro!". Gli abitanti cominciano ad accusarsi a vicenda finché tutti non hanno detto a tutti la frase "Se io sono un Baro, allora tu sei un Baro!".

**Lozzo** Quanti sono gli Onesti dell'isola?

**18.**

Lorenzo Mazza

**Lozzo** (Parlando tra sé) Quanti sono quei quadrati perfetti tali che, calcolandone il quoziente nella divisione con 100, si ottiene il prodotto di due interi positivi consecutivi minori di 100? (Tira la corda) Andiamo, Pucky! (Esce con Pucky, si sentono rumori di caduta)

## 19.

Simone Muselli

**Astragone** (*Salutando in direzione di Lozzo e Pucky*) Ho inventato un gioco che possiamo giocare domani se non viene Godol.

**Teodomiro** Verrà di sicuro!

**Astragone** Vorrei avere le tue certezze! È così che avrei voluto affrontare la vita. Per il gioco, ho disegnato un quadrato di lato 5 dm sul ghiaccio del lago. Ad una distanza di 1 m da esso, si lancia, facendolo scivolare, un disco di 10 cm di raggio. Se il disco, una volta fermo, si trova almeno in parte sopra al quadrato, allora il lancio viene considerato *valido*; se si trova interamente all'interno del quadrato, si vince.

**Teodomiro** Ma è facilissimo!

**Astragone** Vorrei avere le tue certezze. Purtroppo a volte il tiro è lungo, altre volte corto, altre ancora troppo largo a sinistra, poi troppo largo a destra. Io mi impegno, ma praticamente è come se ogni volta lanciassi il disco a caso verso un punto qualsiasi del lago.

**Teodomiro** In queste condizioni casuali, qual è la probabilità di vittoria a seguito di un lancio valido?

[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per  $10^4$ .]

## 20.

Simone Muselli

**Astragone** Ricordo ancora quando ero presentabile e mi avevano chiamato per ricoprire un pavimento rettangolare con 45 piastrelle a quattro lati e ad angoli retti. Pensa che le piastrelle avevano misure in dm dei lati tutte intere, da 1 a 9. Puoi non crederci: le piastrelle erano tutte diverse.

**Teodomiro** Quanti decimetri misurava il perimetro del pavimento?

[Dare come risposta il massimo valore possibile del perimetro.]

## 21.

Damiano Poletti

*Entra Il ragazzo, fa un inchino, inizia a parlare.*

**Il ragazzo** Il signor Godol mi ha incaricato di informarvi che oggi non verrà.

**Teodomiro** Ti ho già visto?

**Il ragazzo** Non credo, signore.

**Teodomiro** Eri qui ieri?

**Il ragazzo** No, signore.

**Teodomiro** Eppure mi sembri proprio di averlo visto. Tu te lo ricordi, Gogo?

**Astragone** Mi pare; forse è il fratello.

**Teodomiro** È venuto tuo fratello ieri?

**Il ragazzo** Non lo so, signore. Il signor Godol mi ha detto di spiegarvi come funziona il faro sull'isola nel lago. Il lago ha la forma di un pentagono regolare e nel suo circocentro è posto un faro. La luce del faro illuminerebbe contemporaneamente in tutte le direzioni, ma attorno alla sorgente luminosa sono posti due scudi cilindrici coassiali. Ciascuno scudo blocca la luce, escluso per una opportuna fenditura verticale che permette il passaggio della luce. Ciascuno scudo ruota in senso orario attorno alla sorgente: nel tempo in cui lo scudo esterno compie un giro completo, quello interno ne compie quattro. In questo modo guardando il faro si alternano momenti in cui si vede la luce e altri in cui invece la luce è oscurata. Più precisamente, dal vertice Nord del lago, apprendo gli occhi in un momento a caso, si avrebbe probabilità di  $\frac{3}{8}$  di riuscire a vedere la luce; dal successivo vertice in senso orario questa probabilità sarebbe  $\frac{11}{40}$ ; dal successivo ancora di  $\frac{3}{8}$ ; dagli ultimi due vertici invece la probabilità sarebbe la stessa.

**Teodomiro** Ecco perché Godol non viene a incontrarci. Quanto vale quindi la probabilità che da uno degli ultimi due vertici, apprendo gli occhi in un momento a caso, si riesca a vedere la luce? (*Il ragazzo esce*)

[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per  $10^4$ .]